ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5

ΘΕΩΡΙΑ

1ο Θέμα

Α. **α)** Τι ονομάζουμε πολυώνυμο ;

β) Τι ονομάζουμε βαθμό ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή και τι βαθμό ως προς δύο ή περισσότερες μεταβλητές ;

γ) Ποιο πολυώνυμο λέμε μηδενικό και τι γνωρίζεται για τον βαθμό του;

δ) Ποιο πολυώνυμο λέμε σταθερό και με τι ισούται ο βαθμός του ;

Β. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

α) Αν το πολυώνυμο P(x) είναι 2ου βαθμού και το Q(x) είναι 3ου, τότε το P(x)Q(x) είναι 6ου .

β) Αν το P(x)Q(x) είναι 8ου βαθμού και το Q(x) είναι 3ου, τότε το P(x) είναι 5ου.

γ) Αν $P(x) = 2x + 4$ και $Q(x) = 3 + x^2$, τότε $P(x)Q(x) = 2x + 4\cdot 3 + x^2$

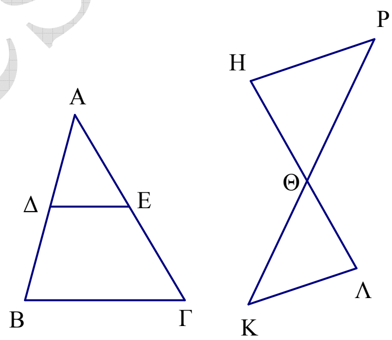
δ) Το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda - 1)\, x^3 + x^2 - 4$ είναι 3ου βαθμού για κάθε τιμή του λ

ε) Το πολυώνυμο $P(x) = (x + 2)\,(x - 3) - x^2 + 7$ είναι 2ου βαθμού

2ο Θέμα

Α.α) Στα διπλανά σχήματα είναι ΔΕ // ΒΓ και ΚΛ // ΗΡ. Εξηγήστε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ , ΑΔΕ είναι όμοια , όπως επίσης και τα τρίγωνα ΘΚΛ , ΘΗΡ.

β) Σε κάθε περίπτωση να γράψετε την αναλογία των ομολόγων πλευρών τους .



Β. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες.

α) Δύο ίσα τρίγωνα είναι όμοια

β) Τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια

γ) Δυο ισοσκελή τρίγωνα με μία γωνία ίση με 48^o είναι όμοια

δ) Δύο όμοια τρίγωνα έχουν τις ομόλογες πλευρές ανάλογες

ε) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οξεία γωνία ίση τότε είναι όμοια

στ) Δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια

ζ) Σε δύο όμοια τρίγωνα ό λόγος των περιμέτρων τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας

η) Σε δύο όμοια τρίγωνα ο λόγος ομοιότητας ισούται με τον λόγο των εμβαδών

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1η Άσκηση

Έστω $A = x(x-4)$ και $B = (x-6)(x+2)$

α) Δείξτε ότι $B = A - 12$

β) Δείξτε ότι η παράσταση $AB + 36$ είναι ανάπτυγμα τελείου τετραγώνου

γ) Να γράψετε το πολυώνυμο $x(x-6)(x-4)(x+2) + 36$ με μορφή τελείου τετραγώνου

δ) Να λύσετε την εξίσωση $x(x-6)(x-4)(x+2) + 36 = 0$

2η Άσκηση

Δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΡ έχουν ΒΓ = ΛΡ, τα ύψη ΑΔ και ΚΜ ίσα μεταξύ τους καθώς επίσης και ίσες τις διαμέσους ΑΗ και ΚΝ.

Να αποδείξετε ότι : **α)** Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΚΜΝ είναι ίσα

β) Τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΚΛΝ είναι ίσα

γ) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΡ είναι ίσα

3η Άσκηση

Να γίνουν οι πράξεις **α)** $\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right):\frac{x^4-1}{x^4-x^3}$

β) $\frac{x^2y^2-y^4}{(x+y)^2-3xy}\cdot\frac{x^2-xy+y^2}{xy^2-y^3}$

(ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΛΥΣΕΙΣ)

1ο Θέμα (απάντηση)

Α.α)

Ονομάζουμε πολυώνυμο το άθροισμα δύο ή περισσότερων μονωνύμων από τα οποία δύο τουλάχιστον δεν είναι όμοια

Α.β)

Ονομάζουμε βαθμό ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή τον μεγαλύτερο βαθμό των όρων του ως προς την μεταβλητή αυτή.

Ονομάζουμε βαθμό ενός πολυωνύμου ως προς δύο ή περισσότερες μεταβλητές τον μεγαλύτερο βαθμό των όρων του ως προς τις μεταβλητές αυτές .

Α.γ)

Το σταθερό πολυώνυμο $P(x) = 0$ το λέμε μηδενικό πολυώνυμο και βαθμός για αυτό δεν ορίζεται

Α.δ)

Λέμε σταθερό πολυώνυμο κάθε πολυώνυμο της μορφής $P(x) = α$, όπου α αριθμός διαφορετικός από το 0 . Κάθε σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού .

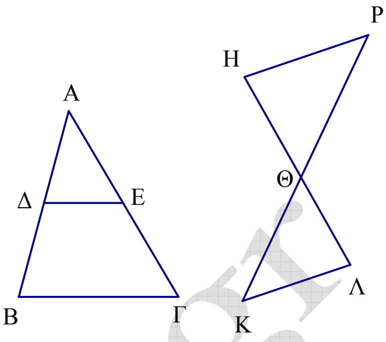
Β.

Με βάση την θεωρία έχουμε

α) Λ (ο βαθμός του γινόμενου ισούται με το άθροισμα των βαθμών)

β) Σ
γ) Λ (χρειάζονται παρενθέσεις)
δ) Λ (αν $\lambda = 1$ το πολυώνυμο είναι $2^{ου}$)
ε) Λ (εκτελώντας πράξεις ο δευτεροβάθμιος όρος απλοποιείται)

2^o Θέμα (απάντηση)



Α.α)

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια διότι έχουν την $\hat{A}$ κοινή και την $\hat{\Delta} = \hat{B}$ ως εντός εκτός των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ με τέμνουσα την ΑΒ.
Τα τρίγωνα ΘΚΛ και ΘΗΡ είναι όμοια διότι έχουν $H\hat{\Theta}P = K\hat{\Theta}\Lambda$ ως κατακορυφήν και $\hat{P} = \hat{K}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΗΡ και ΚΛ με τέμνουσα την ΚΡ.

Α.β)

Στην πρώτη περίπτωση ισχύει $\dfrac{AB}{A\Delta} = \dfrac{A\Gamma}{AE} = \dfrac{B\Gamma}{\Delta E}$

και στη δεύτερη $\dfrac{\Theta P}{\Theta K} = \dfrac{\Theta H}{\Theta\Lambda} = \dfrac{HP}{K\Lambda}$

Β.

Με βάση την θεωρία έχουμε α) Σ
β) Σ (γωνίες 60^o η κάθε μία)
γ) Λ (πρέπει να είναι αντίστοιχη)
δ) Σ
ε) Σ
στ) Σ (οι οξείες γωνίες είναι 45^o)
ζ) Λ (ισούται με το λόγο ομοιότητας)
η) Λ (το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας ισούται με το λόγο των εμβαδών)

$1^η$ Άσκηση (προτεινόμενη λύση)

α)

$B = (x-6)(x+2) = x^2 - 6x + 2x - 12 = x^2 - 4x - 12 = x(x-4) - 12 = A - 12$

β)

$AB + 36 \overset{(\alpha)}{=} A(A-12) + 36 = A^2 - 12A + 36 = (A-6)^2$

γ)

$x(x-6)(x-4)(x+2) + 36 = [x(x-4)][(x-6)(x+2)] + 36 =$

$= AB + 36 \overset{(\beta)}{=}$

$= (A-6)^2 =$

$= [(x(x-4) - 6]^2 =$

$= (x^2 - 4x - 6)^2$

δ)

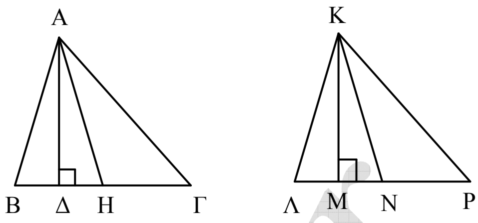
$x(x-6)(x-4)(x+2) + 36 = 0$ άρα (λόγω του (γ)) $(x^2 - 4x - 6)^2 = 0$

$$x^2 - 4x - 6 = 0$$

$\Delta = 40$ και ρίζες $x_1 = \dfrac{4+\sqrt{40}}{2} = \dfrac{4+\sqrt{4\cdot 10}}{2} = \dfrac{4+2\sqrt{10}}{2} = 2 + \sqrt{10}$

$x_2 =$ …………………………………….. $2-\sqrt{10}$

2^{η} Άσκηση (προτεινόμενη λύση)



α)
Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΚΜΝ είναι ορθογώνια και έχουν ΑΔ = ΚΜ και ΑΗ = ΚΝ. Άρα είναι ίσα

β)
Τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΚΛΝ έχουν
ΑΗ = ΚΝ από την υπόθεση και ΒΗ = ΛΝ ως μισά των ίσων τμημάτων ΒΓ και ΛΡ.
Επίσης από την ισότητα των προηγουμένων τριγώνων είναι $A\hat{H}B = K\hat{N}\Lambda$.
Άρα είναι ίσα

γ)
Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΡ έχουν ΒΓ = ΛΡ από την υπόθεση , ΑΒ = ΚΛ και $\hat{B} = \hat{\Lambda}$ από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΗ και ΚΛΝ. Άρα είναι ίσα

3^{η} Άσκηση (προτεινόμενη λύση)

α)

$$\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) : \frac{x^4-1}{x^4-x^3} = \left(\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right) : \frac{x^4-1}{x^4-x^3} =$$

$$= \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3} : \frac{x^4-1}{x^4-x^3} =$$

$$= \frac{x^2(x+1)+(x+1)}{x^3} : \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^3(x-1)} =$$

$$= \frac{(x^2+1)(x+1)}{x^3} : \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^3(x-1)} =$$

$$= \frac{(x^2+1)(x+1)}{x^3} \cdot \frac{x^3(x-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = 1$$

β)

$$\frac{x^2y^2-y^4}{(x+y)^2-3xy} \cdot \frac{x^2-xy+y^2}{xy^2-y^3} = \frac{y^2(x^2-y^2)}{x^2+2xy+y^2-3xy} \cdot \frac{x^2-xy+y^2}{y^2(x-y)} =$$

$$= \frac{y^2(x-y)(x+y)}{x^2+y^2-xy} \cdot \frac{x^2-xy+y^2}{y^2(x-y)} = x+y$$